

Ambiente gráfico de simulación de un péndulo.

J. A. Mijares, F. Reyes, S. Vergara, D. Rojas, J. Salome

Av. San Claudio y 18 Sur, C.U. San Manuel, Edificio 109-A, 72570, Puebla, Pue.

Grupo de robótica, FCE-BUAP

mijares2002@hotmail.com, freyes@ece.buap.mx, svergara@ece.buap.mx,

dorian_915@hotmail.com, joeljoule@ece.buap.mx

Teléfono: +52 222 2295500 ext. 7410.

Resumen—En este documento se explica la elaboración de un simulador para un sistema no-lineal llamado péndulo, el cual fue elaborado como una aplicación WPF, los temas abordados en este documento son: la obtención del modelo dinámico, aplicación del método de integración Runge-Kutta 4, interfaz gráfica de usuario, análisis de estabilidad de un controlador retroalimentado propuesto en este trabajo y una comparación de los resultados generados contra un simulador conocido llamado SIMNON[®].

Palabras clave: Simulador, Péndulo, Modelo Dinámico, Runge-Kutta 4.

I. INTRODUCCIÓN

Definición 1: La simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias -dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos - para el funcionamiento del sistema. (Shannon, 1976)

Los simuladores son una herramienta importante en la actualidad, ya que nos permiten predecir el comportamiento del sistema simulado, por medio de ellos se puede reducir el tiempo de investigación y evitar accidentes cuando los sistemas presentan algún peligro para el ser humano. En este trabajo se realizó un simulador de un péndulo, el cual es un sistema no lineal ampliamente estudiado, esto convierte a nuestro simulador en una herramienta importante para el estudio del control no lineal. Este simulador fue elaborado en la plataforma .net y es una aplicación de escritorio WPF (Windows Presentation Foundation) que es una nueva tecnología de presentación web. Una de las ventajas de utilizar este tipo de aplicación es que puede ser publicada fácilmente como una aplicación web o una aplicación de escritorio sin realizar cambios en el código.

El simulador presenta una interfaz que permite al usuario visualizar el péndulo en un modelo tridimensional y también las gráficas de resultados de la simulación, se le pueden introducir diferentes parámetros de control, de la simulación y propiedades físicas del péndulo.

Para comprobar el funcionamiento del simulador se realiza una comparación de los resultados generados por

el simulador y por un software de simulación llamado SIMNON[®], para esta comparación se utiliza un controlador propuesto en este trabajo, del cual se realiza un análisis de estabilidad y es utilizado en el simulador para controlar posición en lazo cerrado.

En la primera sección de este trabajo se muestra como se obtuvo el modelo dinámico del péndulo, en la segunda sección el método que se utilizó para resolver el sistema y como se aplicó, posteriormente se explica la interfaz gráfica de usuario (GUI¹), posteriormente se realiza el análisis de estabilidad para el controlador propuesto y finalmente la comparación de los resultados tomando como base otro simulador conocido.

II. MODELO DINÁMICO DEL PÉNDULO

El modelo dinámico del sistema nos ayuda a poder predecir el comportamiento de éste. Es por eso que en los simuladores de sistemas dinámicos es importante contar con su modelo, en el trabajo se trató de utilizar un modelo dinámico que abarcara tanto la inercia del péndulo como del motor, sin embargo el modelo de fricción utilizado es sencillo ya que sólo se contempla la fricción viscosa y la fricción Coulomb, la fricción estática no es considerada en el modelo.

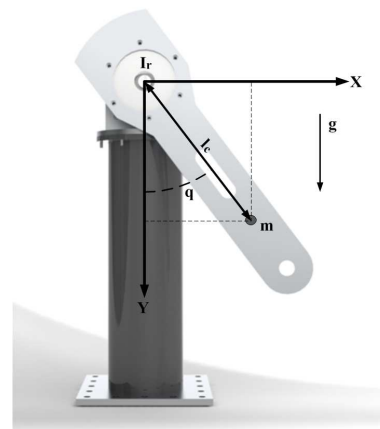


Figura 1. Análisis del Péndulo

¹Por sus siglas en inglés

En la figura anterior se muestra el sistema que se va a simular y se muestran también los datos que nos sirven para realizar el modelo dinámico, donde $X - Y$ es el plano en donde se realiza el movimiento del péndulo, l_c es la distancia del centro de masa del péndulo al centro de giro, q es el ángulo que se mide desde el eje Y hasta el péndulo, I_r es la inercias del rotor, m es la masa del péndulo, y g es la constante de gravedad.

Las ecuaciones de movimiento de este sistema serán obtenidas por las ecuaciones de movimiento de Lagrange, para esto necesitamos obtener la energía cinética, la energía potencial, el Lagrangiano ($\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$) y desarrollar las ecuaciones de Lagrange. (Kelly, 2003)

La energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ para este sistema se obtiene apartir de la energía cinética del péndulo $\mathcal{K}_p(q, \dot{q})$ y del rotor $\mathcal{K}_r(q, \dot{q})$. Las coordenadas del centro de masa del péndulo con respecto al plano $X - Y$ son:

$$x = l_c \sin(q), \quad (1)$$

$$y = -l_c \cos(q). \quad (2)$$

Por lo tanto el vector velocidad del péndulo es:

$$v = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \cos(q)\dot{q} \\ l_c \sin(q)\dot{q} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

La velocidad al cuadrado del centro de masa viene dada por la siguiente expresión:

$$v^T v = l_c^2 \dot{q}^2. \quad (4)$$

Por lo tanto, la energía cinética del péndulo se obtiene como:

$$\mathcal{K}_p(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m v^T v, \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} m l_c^2 \dot{q}^2. \quad (6)$$

La energía cinética del rotor esta expresada de la siguiente manera:

$$\mathcal{K}_r(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} I_r \dot{q}^2. \quad (7)$$

Finalmente la energía cinética de todo el sistema resulta ser:

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}_p(q, \dot{q}) + \mathcal{K}_r(q, \dot{q}), \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2} m l_c^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I_r \dot{q}^2.$$

Por otro lado la energía potencial del sistema se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{U}(q) = -m l_c g \cos(q). \quad (9)$$

De las ecuaciones 8 y 9 podemos obtener el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q), \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} m l_c^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I_r \dot{q}^2 + m l_c g \cos(q). \quad (11)$$

De la ecuación 11 se obtienen las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = [m l_c^2 + I_r] \dot{q},$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] = [m l_c^2 + I_r] \ddot{q},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -m l_c g \sin(q).$$

Haciendo uso de las ecuaciones anteriores y aplicando las ecuaciones de Lagrange se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau - f(\dot{q}),$$

siendo $f(\dot{q}) = b\dot{q} + f_c \text{sign}(\dot{q})$ donde b es la fricción viscosa y f_c la fricción de Coulomb, tenemos que:

$$[m l_c^2 + I_r] \ddot{q} + m l_c g \sin(q) + b\dot{q} + f_c \text{sign}(\dot{q}) = \tau$$

III. INTEGRACIÓN CON RUNGE-KUTTA 4

El modelo dinámico obtenido para este sistema es una ecuación diferencial, utilizaremos un método numérico que nos permitirá aproximar la solución de esta ecuación este método es Runge-Kutta 4 el cual tiene un error de truncamiento de orden superior a otros métodos (Zapateiro, 2007). Lo primero que se realiza antes de aplicar el método de Runge-Kutta 4 es obtener las variables de estado de sistema que son q, \dot{q} , por lo tanto tenemos que:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{\tau - m l_c g \sin(q) - b\dot{q} - f_c \text{sign}(\dot{q})}{[m l_c^2 + I_r]} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Después se integran estas ecuaciones utilizando los 4 pasos del método de Rung-Kutta 4 y el paso de integración (dh), estos pasos son los siguientes:

■ Primer paso

$$K_1 = \dot{q},$$

$$L_1 = \frac{\tau - m l_c g \sin(q) - b\dot{q} - f_c \text{sign}(\dot{q})}{[m l_c^2 + I_r]},$$

$$q = q + \frac{1}{2} K_1 dh,$$

$$\dot{q} = \dot{q} + \frac{1}{2} L_1 dh.$$

■ Segundo paso

$$K_2 = \dot{q},$$

$$L_2 = \frac{\tau - m l_c g \sin(q) - b\dot{q} - f_c \text{sign}(\dot{q})}{[m l_c^2 + I_r]},$$

$$q = q + \frac{1}{2} K_2 dh,$$

$$\dot{q} = \dot{q} + \frac{1}{2} L_2 dh.$$

■ Tercer paso

$$K_3 = \dot{q},$$

$$L_3 = \frac{\tau - m l_c g \sin(q) - b\dot{q} - f_c \text{sign}(\dot{q})}{[m l_c^2 + I_r]},$$

$$q = q + K_3 dh,$$

$$\dot{q} = \dot{q} + L_3 dh.$$

■ Cuarto paso

$$K_4 = \dot{q},$$

$$L_4 = \frac{\tau - ml_c g \sin(q) - b\dot{q} - f_c \text{sign}(\dot{q})}{[ml_c^2 + I_r]},$$

$$q = q + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)dh,$$

$$\dot{q} = \dot{q} + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)dh.$$

Estas ecuaciones se resuelven en cada paso de integración para obtener una solución aproximada de la ecuación diferencial. Las condiciones iniciales, el tiempo de integración y el paso de integración son definidos por el usuario por medio de la interfaz gráfica.

IV. INTERFAZ GRÁFICA DE USUARIO



Figura 2. Interfaz Gráfica del Simulador del Péndulo

La GUI del simulador está dividida principalmente en 3 bloques, en el primer bloque se muestran los parámetros de la simulación, los cuales también se encuentran divididos en tres secciones dependiendo de su uso, las variables son las siguientes:

■ Propiedades del Péndulo

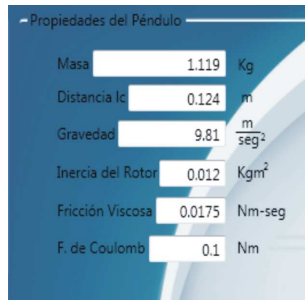


Figura 3. Primera sección del bloque de parametros

- Masa: Es la masa del péndulo dada en Kg .
- Distancia l_c : Es la distancia del centro de giro al centro de masa del péndulo dada en m .
- Gravedad: Es la constante gravitatoria dada en $\frac{m}{seg^2}$

- Inercia del Rotor: Es el momento de inercia del rotor dado en Kgm^2 .
- Fricción Viscosa: Es la constante de fricción viscosa presente en el sistema dada en $Nm - seg$.
- Fricción de Coulomb: Es la constante de fricción de Coulomb presente en el sistema dada en Nm

■ Variables de Control



Figura 4. Segunda sección del bloque de parametros

- K_p : Se refiere a la ganancia proporcional del controlador.
- K_v : Es la constante de ganancia derivativa del controlador.
- Posición Deseada: Es la posición en la que se quiere ubicar al péndulo está dada en grados.
- Posición Inicial: Es la condición inicial de posición del péndulo está dada en grados.
- Velocidad Inicial: Es la condición inicial de velocidad del péndulo está dada en $\frac{rad}{seg}$.
- Tipo de Controlador: En este artículo se utiliza un controlador propuesto que en la siguiente sección será mostrado.

■ Variables de Simulación



Figura 5. Tercera sección del bloque de parametros

- Paso de Integración: Se refiere al paso de integración utilizado en el método numérico de integración.
- Tiempo de Simulación: Es la duración en segundos de la simulación.
- Método de Integración: Se incluyo solamente el método de Runge-Kutta 4.

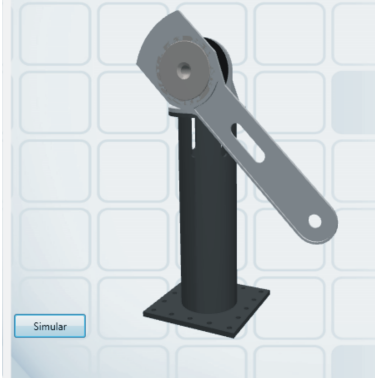


Figura 6. Bloque de simulación

En la figura anterior se muestra el segundo bloque donde se encuentra un modelo tridimensional de la planta, donde se puede visualizar el movimiento del péndulo, también se encuentra el botón para ejecutar la simulación.

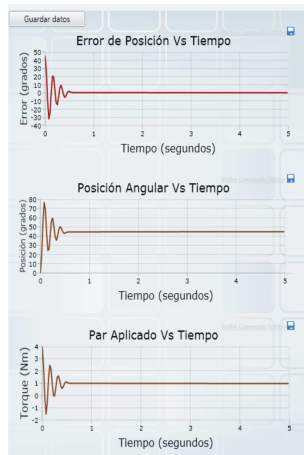


Figura 7. Bloque de resultados y gráficas.

La figura anterior muestra el último bloque donde se presentan los resultados de la simulación en tres gráficas, estas son:

- Error de posición angular (grados) contra el tiempo (seg.).
- Posición angular (grados) contra el tiempo (seg.).
- Torque aplicado (Nm) contra el tiempo (seg.)

En este bloque también se encuentra un botón para guardar los resultados de la simulación en archivos de texto, estos archivos se guardan en el mismo directorio donde se ejecuta el programa. Los resultados que se guardan son: posición angular, error de posición angular, velocidad angular, torque aplicado, tiempo.

V. CONTROLADOR RETROALIMENTADO PROPUESTO

La Teoría de Estabilidad de Lyapunov nos permite determinar la estabilidad de un punto de equilibrio sin tener que resolver la ecuación diferencial (Khalil, 1996). Para

la demostración de estabilidad se utilizó el modelo de un robot tipo péndulo de 1 grado de libertad cuya ecuación en variables de estado es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ \frac{1}{I} [\tau - f_f(\dot{q}) - g(q)] \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde:

$\tilde{q} \in \mathbb{R}$, Error de posición,

$\dot{q} \in \mathbb{R}$, Velocidad,

$I \in \mathbb{R}$, Inercia,

$g(q) \in \mathbb{R}$, Par gravitacional,

$f_f(\dot{q}) \in \mathbb{R}$, Efectos de fricción,

$\tau \in \mathbb{R}$, Par aplicado.

Para encontrar la ecuación de lazo cerrado solo se sustituye la variable τ por el regulador correspondiente el cual tiene la forma:

$$\tau = \nabla U(Kp, \tilde{q}) - f_v(Kv, \dot{q}) + g(q) \quad (14)$$

donde:

$U(Kp, \tilde{q})$, Energía potencial artificial,

$f_v(Kv, \dot{q})$, Función conocida como freno mecánico,

$g(q)$, Compensación de gravedad.

Ahora sustituyendo este regulador en la ecuación de variables de estado obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ \frac{1}{I} [\nabla U(Kp, \tilde{q}) - f_v(Kv, \dot{q}) - f_f(\dot{q})] \end{bmatrix} \quad (15)$$

Con esta forma se puede demostrar que existe el punto de equilibrio, además que es único y que es en el origen ($\tilde{q} = 0$ y $\dot{q} = 0$). Con esto podemos empezar el análisis de estabilidad del regulador.

El regulador que será usado es el siguiente:

$$\tau = K_p \left[\frac{\tilde{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^2}} \right] - K_v \dot{q} + g(q). \quad (16)$$

La forma de este controlador es la siguiente:

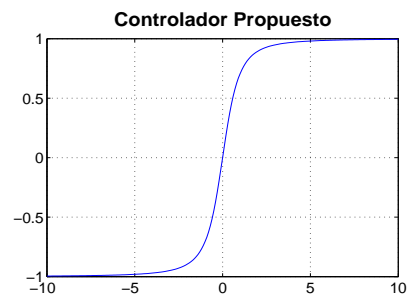


Figura 8. Gráfica del controlador propuesto en este trabajo

Propongamos la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2} I \dot{q}^2 + \left[\sqrt{1 + \tilde{q}^2} - 1 \right] K_p > 0. \quad (17)$$

Dicha función en $V(0) = 0$ y además es definida positiva puesto que I y K_p son definidos positivos por hipótesis. Derivamos la función de Lyapunov:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = I\dot{q}\ddot{q} + \left[\frac{\tilde{q}}{\sqrt{1+\tilde{q}^2}} \right] \dot{\tilde{q}} K_p,$$

sustituyendo $\dot{\tilde{q}}$ por $-\dot{q}$ tenemos:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = I\dot{q}\ddot{q} - \left[\frac{\tilde{q}}{\sqrt{1+\tilde{q}^2}} \right] K_p \dot{q},$$

sustituyendo la expresión para \ddot{q} de la ecuación (13) en lazo cerrado obtenemos:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = \dot{q} [\tau - f_f(\dot{q}) - g(q)] - \left[\frac{\tilde{q}}{\sqrt{1+\tilde{q}^2}} \right] K_p \dot{q}$$

sustituyendo τ de la ecuación (16)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = & K_p \left[\frac{\tilde{q}}{\sqrt{1+\tilde{q}^2}} \right] \dot{q} - K_v \dot{q}^2 \\ & - f_f(\dot{q})\dot{q} - \left[\frac{\tilde{q}}{\sqrt{1+\tilde{q}^2}} \right] K_p \dot{q} \end{aligned}$$

reduciendo tenemos entonces:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = -K_v \dot{q}^2 - f_f(\dot{q})\dot{q} \leq 0. \quad (18)$$

La cuál es una función semidefinida negativa globalmente, por eso el punto de equilibrio es estable. La estabilidad asintótica se prueba tomando en cuenta la naturaleza autónoma de la ecuación en lazo cerrado y aplicando el teorema de LaSalle. (LaSalle, 1961)

El atractor es:

$$\Omega = \left\{ \left[\begin{array}{c} \tilde{q} \\ q \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{2n} \mid \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0 \forall \tilde{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \right\}, \quad (19)$$

el subconjunto

$$\Omega = \left\{ \left[\begin{array}{c} \tilde{q} \\ q \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{2n} \mid \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0 \forall \tilde{q} = 0 \right\}, \quad (20)$$

esto implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\begin{array}{c} \tilde{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{array} \right] = 0 \quad (21)$$

Demostando así que el punto de equilibrio es único y asintóticamente estable.

VI. COMPARACIÓN DE SIMULADORES

Para comprobar el correcto funcionamiento de este simulador se realiza control de posición a lazo cerrado utilizando un simulador conocido llamado SIMNON[®], se seleccionó este software por que es rápido en su tiempo de simulación y ofrece la opción de integrar numericamente con el método de Runge-Kutta 4, el cual se utiliza en nuestro simulador. También el sistema se puede simular mediante MATLAB[®] pero se demora mucho tiempo realizando la simulación.

Nuestro simulador fue elaborado como motivo para la fabricación de una plataforma real, es por eso que los datos que utilizaremos para simular son datos que se obtienen del software con el que se diseño la plataforma real, este software nos muestra la masa y la ubicación del centro de masa del péndulo. Los datos de la fricción fueron tomados de (Reyes, 1997), el dato de la inercia del rotor fue tomado de los datos de especificación del fabricante.

Los resultados de nuestro simulador se exportaron en un archivo de texto, al igual que los datos que nos dió el software SIMNON[®], se utilizó un software intermedio para graficar los resultados de ambos softwares. Las siguientes graficas muestran los resultados del control de posición a 90° del péndulo en lazo cerrado utilizando el controlador propuesto en este trabajo. La gráfica 9 muestra el error de posición contra el tiempo donde \tilde{q}_a representa el resultado de error de posición en nuestro simulador y \tilde{q}_b representa el resultado de error de posición en el software SIMNON[®]:

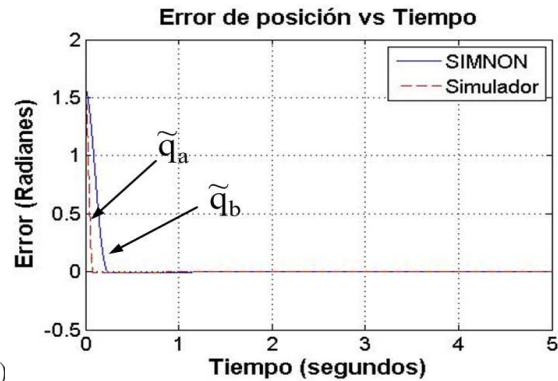


Figura 9. Comparación de control a 90°, \tilde{q}_a y \tilde{q}_b vs tiempo.

Aquí podemos ver que en el transitorio sí difieren los simuladores, pero en el parte estacionaria los dos simuladores se aproximan mucho. La gráfica 10 nos muestra el par aplicado de ambos simuladores donde τ_a es el par aplicado de nuestro simulador y τ_b es el par aplicado por el software SIMNON[®]:

También en esta gráfica 10 podemos observar que los torques aplicados de cada simulador presentan un transitorio similar y una buena aproximación en el estacionario. En las gráficas 11 y 12 se muestra una segunda comparación pero

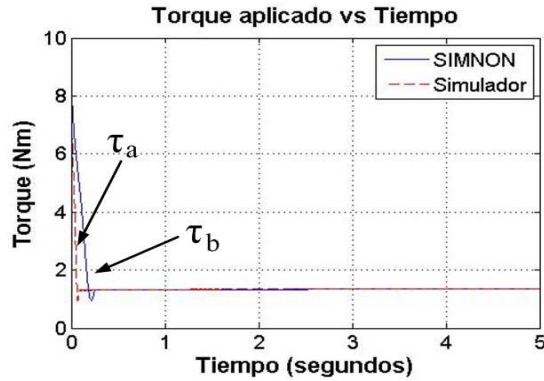


Figura 10. Comparación de control a 90° , τ_a y τ_b vs tiempo.

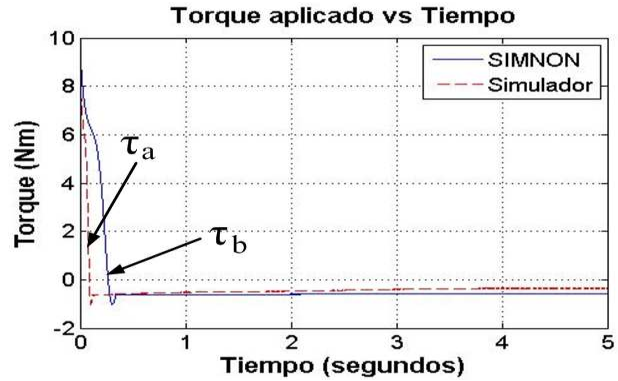


Figura 12. Comparación de control a 180° , τ_a y τ_b vs tiempo.

ahora utilizando un control de posición en lazo cerrado a 180° , nuevamente se utiliza el controlador propuesto en este trabajo. La gráfica 11 muestra el error de posición contra el tiempo de ambos programas de simulación:

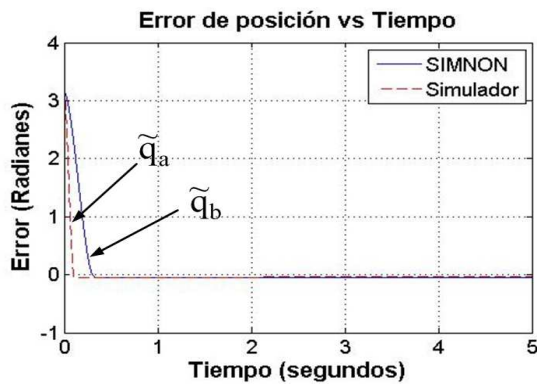


Figura 11. Comparación de control a 180° , \tilde{q}_a y \tilde{q}_b vs tiempo.

Nuevamente podemos ver que en el transitorio si difieren los simuladores, pero en el parte estacionaria los dos simuladores se aproximan mucho. La gráfica 12 nos muestra la comparación del par aplicado en ambos simuladores:

En los resultados de esta comparativa pudimos observar que el simulador presentado en este trabajo tiene un buen desempeño y es competitivo con otros simuladores.

VII. CONCLUSIONES

El simulador elaborado nos servirá como una herramienta de estudio la cuál complementara la plataforma real, ya que el fin de este simulador es poder realizar las pruebas de controladores, sintonizar las ganancias y corregir errores antes de experimentar con la plataforma real, otra ventaja es que la aplicación realizada puede en un futuro ser ejecutada como una aplicación web, con la opción a descargar la aplicación de escritorio.

Una de las principales modificaciones que se tienen contempladas a futuro es introducir un analizador sintáctico

para la propuesta de controladores, otra modificación es un modelo de fricción que una vez fabricada la plataforma real nos presente la mejor aproximación al comportamiento del sistema real, también se planea introducir un catálogo de métodos de integración, las demás modificaciones ya serán sobre la presentación y una mejor interacción con el usuario.

La contribución de este trabajo es un simulador de sistemas no lineales como lo es el péndulo. El simulador presenta una gran velocidad tanto para resolver el sistema como para graficar los resultados, también cuenta con una buena interfaz gráfica en donde se presenta un modelo tridimensional. El uso de las aplicaciones WPF permite al programador enfocarse al modelado de sistemas dinámicos no lineales y al estudio del control, cuando en otras aplicaciones como Windows Form Application se invierte mucho tiempo para lograr la animación tridimensional y la presentación de los resultados en gráficas.

REFERENCIAS

- Shannon, R y Johannes, J. D. (1976). *Systems simulation: the art and science*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. 6(10). pp. 723-724.
- Kelly, R. y Santibañez, V. (2003). *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Prentice Hall. España.
- H. K. Khalil (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall. New Jersey.
- Zapateiro, J. y Fernández, V. (2002). *Análisis Numérico*. Uninorte. Colombia.
- LaSalle, J. y Lefschetz, S. (1961). *Stability by Lyapunov's direct method with applications*. Academic Press, New York.
- Reyes, F. y Kelly, R., (1997), *Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot*, Robotica, Vol. 15, pp. 563-571.